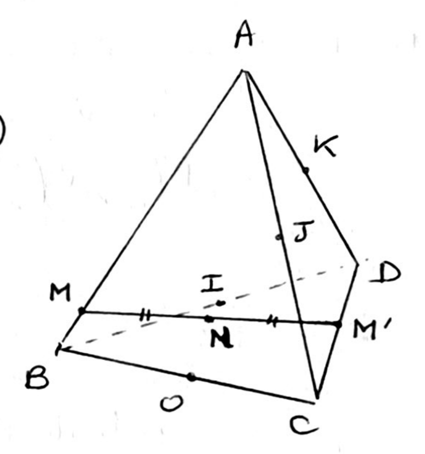
Lieu et barycentre dans l'espace

ABCD est un tétraèdre et O désigne le milieu de [BC].

1) Représenter l'intersection du plan $\mathcal{P} = (O, \vec{AB}, \vec{CD})$ avec les arêtes (AC), (BC), (BD) et (AD) du tétraèdre

2) Soient M et M' 2 pts qques.
Mq le pt I défini par $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'})$ est le milieu de [MM'].
En déduire que si M et M' appartiennent respectivement aux dtes (AB) et (CD), le milieu I de [MM'] appartient au plan $\mathcal{P}$.



3) Quel est le lieu des milieux des segments d'extrémités resp. situées sur (AB) et sur (CD) ?

---

1) $\mathcal{P}$ coupe les arêtes en leurs milieux. En effet, si J milieu de [AC], $\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{OA} \in \vec{\mathcal{P}} \Rightarrow J \in \mathcal{P}$ donc $J \in \mathcal{P} \cap (AC)$. (...)

2) * $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM'}) = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'})$ caractérise bien le milieu de [MM'].

* $\left.\begin{array}{l} M \in (AB) \\ M' \in (CD) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{BM} \in \vec{\mathcal{P}} \\ \vec{CM'} \in \vec{\mathcal{P}} \end{array}\right. \Rightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'}) \in \vec{\mathcal{P}}$

$\Rightarrow I \in \mathcal{P}$.

3) Soit $\mathcal{E}$ ce lieu géométrique. 2) prouve que $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$.
Il reste à montrer la réciproque, ie que $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

réf. Tenacher TCE 2 I, ex 32 p 73

Soit $N \in \mathcal{P}$. Alors N est bary. de $O(\alpha)$, $I(\beta)$, $J(\gamma)$, $K(\delta)$ pour des coeff. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ convenables et avec $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

On a :

$N =$ bary. de $O(\alpha)$ $I(\beta)$ $J(\gamma)$ $K(\delta)$

$O(\alpha) \to$ bary. $B\left(\frac{\alpha}{2}\right), C\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$I(\beta) \to B\left(\frac{\beta}{2}\right) D\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$J(\gamma) \to A\left(\frac{\gamma}{2}\right) C\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$K(\delta) \to A\left(\frac{\delta}{2}\right) D\left(\frac{\delta}{2}\right)$

donc par associativité du barycentre :

$N =$ bary. de $A\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ $B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $C\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$ $D\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)$

$=$ bary de $M\left(\frac{1}{2}\right)$, $M'\left(\frac{1}{2}\right)$

où $\begin{cases} M \text{ bary. de } A\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right), B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ M' \text{ bary. de } C\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right), D\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right) \end{cases}$

Finalement $N =$ milieu de $[MM']$ où $M \in (AB)$ et $M' \in (CD)$

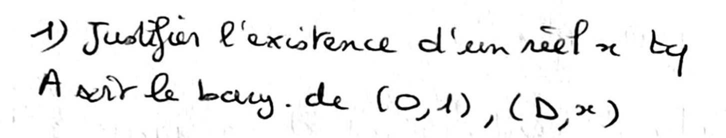
donc $N \in \mathcal{E}$.

CQFD

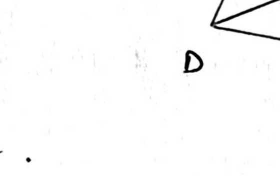
Associativité du Barycentre

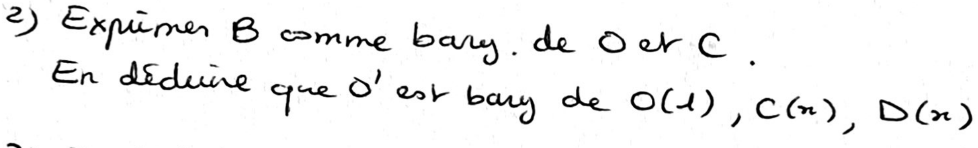
Trapèze complet :

Dans la fig. ci-contre, ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD). Il s'agit de mq la dte (OO') passe par les milieux de [AB] et [CD]



1) Justifier l'existence d'un réel x tq A soit le bary. de $(O,1)$, (D,x)





2) Exprimer B comme bary. de O et C.
En déduire que O' est bary de $O(1)$, $C(x)$, $D(x)$

3) En déduire que (OO') passe par le milieu de [C,D]

4) Montrer que (OO') passe par le milieu de [AB].

5) Donner une autre dém. de ce resultat utilisant les homothéties.

---

1) Trivial

2) Thales $\Rightarrow$ B bary $O(1)$, $C(x)$.

On utilise la prop. d'associativité des barycentres :

Soit O' le bary. de $\underbrace{O(1), C(x)}_{B(1+x)}, D(x)$, alors O' est le bary de $B(1+x), D(x)$

donc $O' \in (BD)$

O' bary de $\underbrace{O(1), D(x)}_{A(1+x)}, C(x)$ $\Rightarrow$ O' bary de $A(1+x), C(x)$

$\Rightarrow O' \in (AC)$

Finalement $O' \in (BD) \cap (AC)$.

3) * Soit I le milieu de [CD]. Par associativité des bary :

O' bary de $O(1)$ $\underbrace{C(x)\ D(x)}_{I(2x)}$ $\Rightarrow$ O' bary de $O(1), I(2x)$

$\Rightarrow O' \in (OI)$.

Donc (OI) passe par le milieu de [CD].

(réf : Terracher TC92 II, ex 54 p77)

4) * Pour mq le milieu de [AB] est sur (OO'), on recommence 2) et 3) avec D bary. de O(1), A(n) et C bary. de O(1), B(n)

5) L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}$ transforme le segment [AB] en [DC], donc le milieu J de [AB] en le milieu I de [CD]. Donc O, J, I alignés.

On recommence avec l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{\overline{O'D}}{\overline{O'B}}$.